Análisis Funcional

Examen XIII

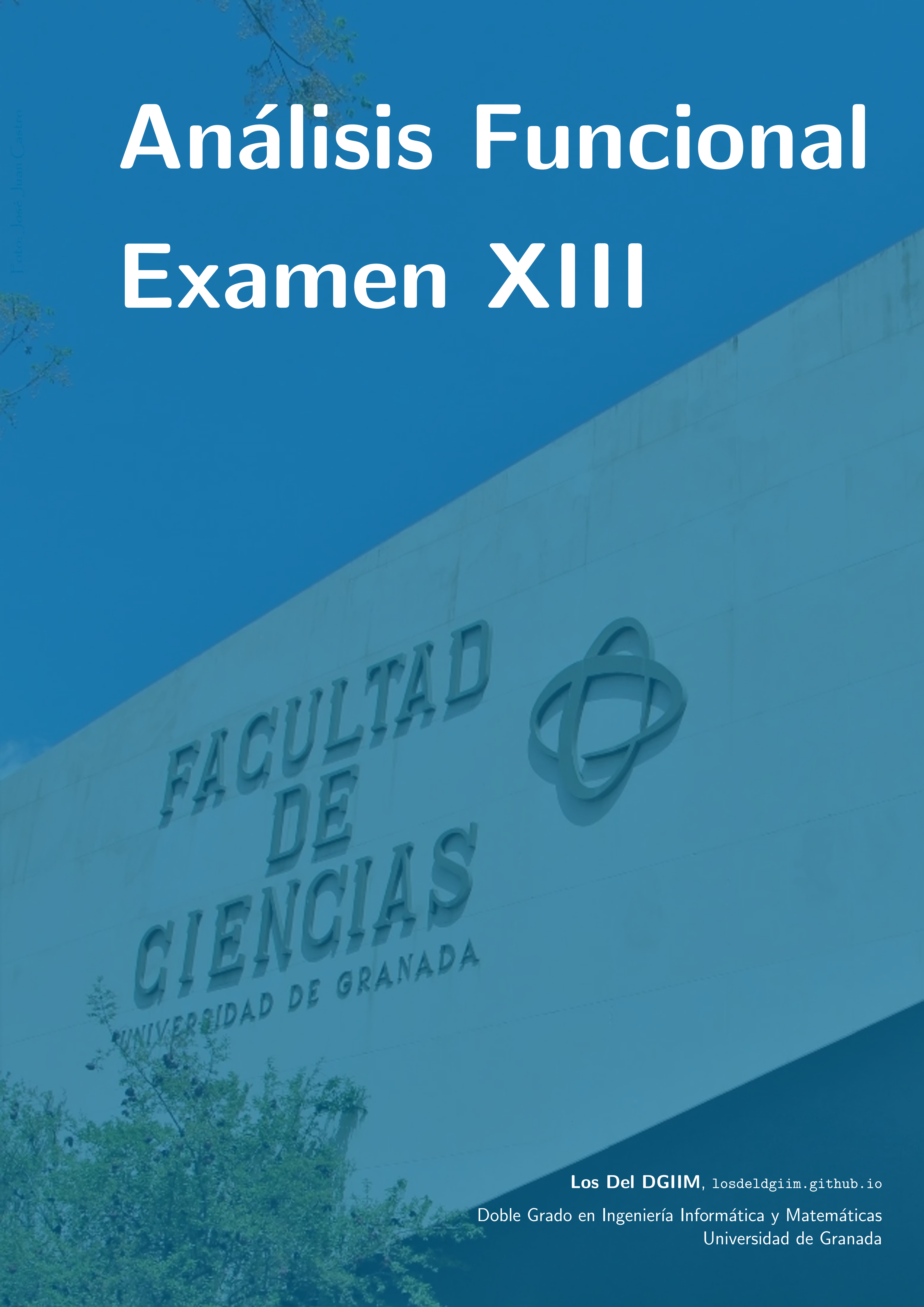

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen XIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Examen Ordinario de Incidencias.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sean:

$$F = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \qquad G = \{f \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\},$$
$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}, \qquad \forall f \in X$$

a) ¿Es $(F, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

b) ¿Es $(G, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en el espacio vectorial E. Prueba que si se verifica la propiedad

$$\text{“toda sucesión } \{x_n\} \subset E \text{ verificando } \left\{\begin{array}{l} \{x_n\} \overset{(E,\|\cdot\|_1)}{\longrightarrow} x \\ \{x_n\} \overset{(E,\|\cdot\|_2)}{\longrightarrow} y \end{array}\right. \text{ comple } x = y\text{”}$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Ejercicio 3. Sea E un espacio de Banach.

a) [**1.5 puntos**] Si C es un subconjunto convexo de E, prueba que

$$C \text{ es cerrado en la topología de la norma} \Longleftrightarrow C \text{ es cerrado en la topología débil } \sigma(E, E^*).$$

b) [**0.75 puntos**] Sea una sucesión $\{f_n\} \subset E^*$ verificando

$$\{\langle f_n, x\rangle\} \text{ es convergente para todo } x \in E.$$

Prueba que existe $f \in E^*$ tal que

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

c) [**0.75 puntos**] Supongamos que E es reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que

$$\{\langle f, x_n\rangle\} \text{ es convergente para cada } f \in E^*.$$

Prueba que existe $x \in E$ tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E^*)$$

d) [**1 punto**] Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\} \subset E = C_0$ tal que $\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$, pero no sea convergente débilmente en $\sigma(E, E^*)$.